ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย

เพื่อเตรียมสอบ ONET + 9 วิชาสามัญ + GAT-PAT

วิชาคณิตศาสตร์ (PAT1 + 9 วิชาสามัญ)

ชุดที่ 7 (ตอนที่ 4/5)

โดยช่วงตั้งแต่ 24 พ.ค.-14 ต.ค. 59 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้ ตะลุยโจทย์ ป.6 ในวันอังคาร, ตะลุยโจทย์ ม.3 ในวันพุธ และตะลุยโจทย์ ม.ปลาย ในวันพฤหัส+วันศุกร์

1. ถ้า $\log_3(x) = p$ และ $\log_7(x) = q$ แล้ว $\log_{21}(x)$ มีค่าเท่าใด

1) pq 2) $\frac{1}{p+q}$

3) $\frac{1}{p^{-1}+q^{-1}}$ 4) $\frac{pq}{p^{-1}+q^{-1}}$

2. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $f(x) = 9x + 1$ และ $g(x) = x^2$ เซตคำตอบของอสมการ $(f\circ g)(x) \ge (g\circ f)(x)$ คือช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1) $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$ 2) $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$

3) $\left[-\frac{1}{4}, 0\right]$ 4) $\left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$

3. ถ้า $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \le 5 \\ cx-3, & x > 5 \end{cases}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว $f^{-1}(9)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 6 2) 8

3) 10 4) 12

4. ค่าของ $10\cot(\cot^{-1}3 + \cot^{-1}7 + \cot^{-1}13 + \cot^{-1}21)$ เท่ากับเท่าใด

1) 12 2) 13

3) 14 4) 15

5. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $g(x) = 9x^2 \cdot f(x)$ ถ้าความชันของเส้นสัมผัสของกราฟของ g ที่จุด $(1, g(1))$ เท่ากับ −9 และกราฟของ f ผ่านจุด (1, 1) แล้ว สมการของเส้นสัมผัสของกราฟของ f ที่จุด (1, 1) คือสมการในข้อใดต่อไปนี้

1) $y = 3x + 3$ 2) $y = 3x + 4$

3) $y = -3x + 3$ 4) $y = -3x + 4$

6. กำหนดให้ I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก

ถ้า $r = \left\{(x, y) \in I^+ \times I^+ \;\middle|\; \frac{x + y^{-1}}{x^{-1} + y} = 13,\ x + y \le 100\right\}$

แล้ว จำนวนสมาชิกของ r เท่ากับเท่าใด

1) 6 2) 7

3) 8 4) 9

เฉลย

1. เฉลย 3) $\frac{1}{p^{-1}+q^{-1}}$

$\log_3(x) = p$ หมายความว่า $3^p = x$ หรือ $3 = x^{1/p}$

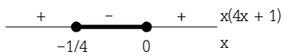
$\log_7(x) = q$ หมายความว่า $7^q = x$ หรือ $7 = x^{1/q}$

ดังนั้น
$$(3)(7) = (x^{1/p})(x^{1/q})$$
$$21 = x^{1/p + 1/q} = x^{p^{-1}+q^{-1}}$$
$$21^{1/(p^{-1}+q^{-1})} = x$$
$$\log_{21}(x) = \frac{1}{p^{-1}+q^{-1}}$$

2. เฉลย 3) $\left[-\frac{1}{4}, 0\right]$

$$(f\circ g)(x) \ge (g\circ f)(x)$$
$$f(g(x)) \ge g(f(x))$$
$$f(x^2) \ge g(9x+1)$$
$$9x^2 + 1 \ge (9x+1)^2$$
$$9x^2 + 1 \ge 81x^2 + 18x + 1$$
$$72x^2 + 18x \le 0$$
$$4x^2 + x \le 0 \qquad \text{(หารด้วย 18)}$$
$$x(4x+1) \le 0$$

เขียนกราฟแสดงเครื่องหมายของ $x(4x + 1)$ บนช่วงต่างๆ ดังนี้



จะพบว่า $x(4x + 1) \le 0$ บนช่วง $\left[-\frac{1}{4}, 0\right]$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการที่กำหนดให้คือ ช่วง $\left[-\frac{1}{4}, 0\right]$

3. เฉลย 3) 10

ขั้นที่ 1 หาค่าของ c

ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ x = 5 (เราตั้งข้อสมมุตินี้ได้ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง)

แล้ว $\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x) = f(5)$

สังเกตว่า $\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} (x-2) = 3 = f(5)$

ให้ $\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} (cx-3) = 3$

$$5c - 3 = 3$$
$$c = \frac{6}{5}$$

ดังนั้น $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \le 5 \\ \frac{6}{5}x - 3, & x > 5 \end{cases}$

ขั้นที่ 2 หาค่าของ $f^{-1}(9)$

ให้ $f^{-1}(9) = x$

จะได้ $f(x) = 9$

กรณีที่ 1 ลองใช้ $f(x) = x - 2$ จะได้ว่า $f(x) = 9$ หรือ $x - 2 = 9$ ก็ต่อเมื่อ x = 11 แต่ $f(x) = x - 2$ ใช้ได้เมื่อ $x \le 5$ เท่านั้น ดังนั้นกรณีนี้เป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 2 ลองใช้ $f(x) = \frac{6}{5}x - 3$ จะได้ว่า $f(x) = 9$ หรือ $\frac{6}{5}x - 3 = 9$ ก็ต่อเมื่อ x = 10 สรุปว่า $f^{-1}(9) = 10$

4. เฉลย 4) 15

ให้ $a = \cot^{-1}3,\ b = \cot^{-1}7,\ c = \cot^{-1}13,\ d = \cot^{-1}21$ ...(1)

$e = a + b,\quad f = c + d$ ...(2)

ดังนั้น สิ่งที่ต้องการหาก็คือ $10\cot(e + f)$

ใช้เอกลักษณ์ $\cot(x+y) = \frac{(\cot x)(\cot y) - 1}{\cot x + \cot y}$ ...(3)

และ $\cot(\cot^{-1}x) = x$ สำหรับทุกค่าของ x ...(4)

จะได้ว่า
$$\cot e = \cot(a+b) = \frac{3\cdot 7 - 1}{3+7} = 2$$
$$\cot f = \cot(c+d) = \frac{13\cdot 21 - 1}{13+21} = 8$$
$$\cot(e+f) = \frac{2\cdot 8 - 1}{2+8} = \frac{3}{2}$$

ดังนั้น $10\cot(e + f) = 15$ คือคำตอบที่เราต้องการหา

5. เฉลย 4) $y = -3x + 4$

จาก $g(x) = 9x^2 \cdot f(x)$

จะได้ $g'(x) = 9[x^2 \cdot f'(x) + f(x) \cdot 2x]$

$= 9x[x \cdot f'(x) + 2 \cdot f(x)]$

เนื่องจากความชันของเส้นสัมผัสกราฟของ g ที่จุด $(1, g(1))$ เท่ากับ −9 นั่นคือ $g'(1) = -9$ และกราฟของ f ผ่านจุด (1, 1) หรือ $f(1) = 1$

ดังนั้น
$$-9 = g'(1) = 9(1)[1 \cdot f'(1) + 2 \cdot 1]$$
$$-1 = f'(1) + 2$$
$$f'(1) = -3$$

นั่นคือ เส้นสัมผัสของกราฟของ f ที่จุด (1, 1) มีความชัน −3

สมการของเส้นสัมผัสนี้คือ
$$y - 1 = -3(x - 1)$$
$$y - 1 = -3x + 3$$
$$y = -3x + 4$$

6. เฉลย 2) 7

จาก $\frac{x + y^{-1}}{x^{-1} + y} = 13$

คูณด้วย xy ทั้งตัวเศษและตัวส่วนทางข้างซ้ายของสมการ จะได้

$$\frac{x^2y + x}{y + xy^2} = \frac{x(xy+1)}{y(1+xy)} = \frac{x}{y} = 13$$
$$x = 13y$$

แทนค่า $x = 13y$ ในเงื่อนไข $x + y \le 100$ จะได้ $14y \le 100$

จำนวนเต็มบวก y ที่สอดคล้องกับอสมการ $14y \le 100$ มี 7 จำนวน ได้แก่ 1, 2, 3, 4, 5, 6 และ 7 ดังนั้น มีคู่อันดับ (x, y) ใน r ทั้งหมด 7 คู่

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่
www.bunditnaenaew.com